离散数学

大连理工大学软件学院

陈志奎　博士、教授

办公室：　综合楼405，Tel：　62274392
实验室：综合楼一楼，教学楼A502/C109，

Mobile: 13478461921
Email: zkchen@dlut.edu.cn
zkchen00@hotmail.com
QQ：　1062258606

离散数学

第一章 命题逻辑

回顾

- 原子命题
- 复合命题
  - 逻辑否定 **Negation**
  - 逻辑合取 **Conjunction**
  - 析取 **Disconjunction**
  - 单条件 **Conditional**
  - 双条件 **Double conditional**
  - 异或 **Exclusive or Xor**
  - 联接词
- 真值表　　$\neg$ $\wedge$ $\vee$ $\rightarrow$ $\leftrightarrow$ $\bigtriangledown$

P	Q	$\neg P$	$P \wedge Q$	$P \vee Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$	$P \bigtriangledown Q$
0	0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	1	1	0	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	1	1	0

1.3命题变元和合式公式

- 命题变元
  - 用*P*表示一个抽象的命题，而不是一个具体的命题时，称它为以表示任意命题命题变元
  - 不能确定真值
- 合式公式
  - 由命题变元、逻辑联接词及圆括号构成合式公式
- 合式公式递归定义

（1）真值T和F是合式公式。

（2）单个命题变元是合式公式。

（3）如果*A*是合式公式，那么¬*A*是合式公式。

（4）如果*A*和*B*均是合式公式，那么 $(A \to B)$和 $(A \leftrightarrow B)$ 都是合式公式。

（5）当且仅当有限次的应用(1)、(2)、(3)、（4）条规则由逻辑联结词、圆括号所组成的有意义的符号串是合式公式。

上面的定义成为递归定义法，(1)、（2）称为递归定义基础，（3）和（4）称为递归定义的归纳，（5）称为递归定义的界限。

1.3命题变元和合式公式

- 判断下列字符串哪些是合式公式，哪些不是？

P，$\neg P$，$P \wedge Q$

$(P \to Q) \to (\wedge Q)$

$(P \to Q$

$((P \to Q) \wedge (Q \to R)) \leftrightarrow (S \leftrightarrow T)$

$(P \to (P \wedge \neg Q))$

1.3命题变元和合式公式

几个概念：

命题

命题变元

命题公式——合式公式

命题公式 vs 命题

命题公式：没有真假意义
命题：有真假意义

真值表

- 设**P**是一个命题公式，P_1，P_2，…，P_n是出现在**P**中的所有命题变元，对于这些命题变元真值指派的每一种可能的组合，都能唯一的确定**P**的真值。将这些真值列成一个表，称为命题公式**P**的真值表。
- 给出命题公式$\neg((P \vee Q) \wedge P)$ 的真值表

P	Q	$P \vee Q$	$(P \vee Q) \wedge P)$	$\neg((P \vee Q) \wedge P)$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	1	0
1	1	1	1	0

应用

- 系统规范性说明
  - 在说明硬件系统和软件系统时，将自然语言语句翻译成逻辑表达式是很重要的一部分。
  - 系统和软件工程师从自然语言中提取需求，生成精确、无二义的规范说明，这些说明可以作为系统开发的基础。

应用

- 确定下列系统规范性说明是否一致

  “诊断消息存放在缓冲区中或是被重传”

  “诊断消息没有存储在缓冲区中”

  “如果诊断消息存储在缓冲区中，那么它被重传”

- 解：
  - ***P***：诊断消息存储在缓冲区中
  - ***Q***：诊断消息被重传
  - 三个命题分别是 $P \vee Q$，$\neg P$，$P \rightarrow Q$

P	Q	$P \vee Q$	$\neg P$	$P \rightarrow Q$
0	0	0	1	1
0	**1**	**1**	**1**	**1**
1	0	1	0	0
1	1	1	0	1

逻辑难题

- 侦探调查了罪案了四位证人，从证人的话侦探得出的结论是：如果男管家说的是真话，那么厨师说的也是真话；厨师和园丁说的不可能都是真话；园丁和杂役不可能都在说谎；如果杂役说真话，那么厨师在说谎。能判定四个人分别在说谎还是说真话吗？
- 解：首先假设*M*:男管家说真话

  C:厨师说真话

  G:园丁说真话

  Z:杂役说真话

- 符号化并构造真值表：

M	C	G	Z	$M\rightarrow C$	$(C\wedge\neg G)\vee(\neg C\wedge G)\vee(\neg C\wedge\neg G)$, $\neg(C\wedge G)$,	$(G\wedge\neg Z)\vee(\neg G\wedge Z)\vee(G\wedge Z)$, $G\vee Z$,	$Z\rightarrow\neg C$
0	0	0	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	0	1
0	0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	0	1
0	1	0	0	1	1	0	1
					…		
1	1	1	1	1	0	0	0

公式的等价性

- 定义：设A、B是两个命题公式，P_1，P_2，…，P_n是出现在A和B中的所有命题变元。如果对于P_1，P_2，…，P_n的2^n个真值指派的每一组，公式A和B的真值相同，则称A和B等价。记作$A \Leftrightarrow B$。

- 判断公式等价方法：
  - 真值表法
  - 等价公式变换

真值表判定公式等价性

- 利用真值表证明公式等价性
  - 证明 $P \leftrightarrow Q$ 与 $P \wedge Q \vee \neg P \wedge \neg Q$ 是相互等价的。

P	Q	$P \leftrightarrow Q$	$P \wedge Q \vee \neg P \wedge \neg Q$
0	0	1	1
0	1	0	0
1	0	0	0
1	1	1	1

基本的等价公式

E_1 $P \vee Q \Leftrightarrow Q \vee P$

E_2 $P \wedge Q \Leftrightarrow Q \wedge P$

E_3 $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow Q \leftrightarrow P$

} 交换律

E_4 $(P \vee Q) \vee R \Leftrightarrow P \vee (Q \vee R)$

E_5 $(P \wedge Q) \wedge R \Leftrightarrow P \wedge (Q \wedge R)$

E_6 $(P \leftrightarrow Q) \leftrightarrow R \Leftrightarrow P \leftrightarrow (Q \leftrightarrow R)$

} 结合律

E_7 $P \wedge (Q \vee R) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$

E_8 $P \vee (Q \wedge R) \Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$

E_9 $P \rightarrow (Q \rightarrow R) \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)$

} 分配律

基本的等价公式

E_{10} $\neg\neg P \Leftrightarrow P$ 双重否定律

E_{11} $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$

E_{12} $\neg(P \vee Q) \Leftrightarrow \neg P \wedge \neg Q$

德•摩根律

E_{13} $\neg(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow P \nabla Q$

E_{14} $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg Q \rightarrow \neg P$ 逆反律

E_{15} $\neg P \leftrightarrow \neg Q \Leftrightarrow P \leftrightarrow Q$

E_{16} $P \wedge P \Leftrightarrow P$

E_{17} $P \vee P \Leftrightarrow P$

等幂律

E_{18} $P \wedge \neg P \Leftrightarrow F$

E_{19} $P \vee \neg P \Leftrightarrow T$

否定律

E_{20} $P \wedge T \Leftrightarrow P$

E_{23} $P \vee F \Leftrightarrow P$

同一律

基本的等价公式

E_{21} $P \wedge F \Leftrightarrow F$

E_{22} $P \vee T \Leftrightarrow T$

} 零律

E_{24} $P \leftrightarrow T \Leftrightarrow P$

E_{25} $P \leftrightarrow F \Leftrightarrow \neg P$

E_{26} $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P) \Leftrightarrow (P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q)$

E_{27} $P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$

E_{28} $P \wedge Q \rightarrow R \Leftrightarrow (P \rightarrow (Q \rightarrow R))$ 输出律

E_{29} $P \wedge (P \vee Q) \Leftrightarrow P$

E_{30} $P \vee (P \wedge Q) \Leftrightarrow P$

} 吸收律

公式的等价性

- **下面我们给出子公式，及关于公式等价的一个定理**
- 定义： 设A是一个公式，A'是A的一部分，且A'也是一个命题公式，则称A'是A的子公式。

- 替换规则：设A'是公式A的子公式，B'是一命题公式且$A' \Leftrightarrow B'$，将A中的A'用B'来取代，则所得到的是一个新公式， 记为B，且$A \Leftrightarrow B$。

- 例**1**（$P\wedge(Q\vee R)) \vee(P \wedge\neg Q \wedge\neg R) \Leftrightarrow P$
- 证明：左边$\Leftrightarrow(P\wedge(Q\vee R)) \vee(P \wedge\neg(Q \vee R))$
- $\Leftrightarrow P \wedge((Q\vee R) \vee \neg(Q \vee R))$
- $\Leftrightarrow P \wedge T$
- $\Leftrightarrow P$.

公式的等价性

例：试证明$P \wedge \neg Q \vee Q \Leftrightarrow P \vee Q$

证明：

$P \wedge \neg Q \vee Q$

$\Leftrightarrow Q \vee P \wedge \neg Q$ E_1

$\Leftrightarrow (Q \vee P) \wedge (Q \vee \neg Q)$ E_8

$\Leftrightarrow (Q \vee P) \wedge T$ E_{19}和替换规则

$\Leftrightarrow P \vee Q$ E_{20}

公式的等价性

例：试证明$(P \to Q) \to (Q \vee R) \Leftrightarrow P \vee Q \vee R$

证明：

$(P \to Q) \to (Q \vee R)$

$\Leftrightarrow (\neg P \vee Q) \to (Q \vee R)$ E_{27}和替换规则

$\Leftrightarrow \neg(\neg P \vee Q) \vee (Q \vee R)$ E_{27}

$\Leftrightarrow (P \wedge \neg Q) \vee (Q \vee R)$ E_{12}和替换规则

$\Leftrightarrow ((P \wedge \neg Q) \vee Q) \vee R$ E_4

$\Leftrightarrow (P \vee Q) \wedge (Q \vee \neg Q)) \vee R$

$\Leftrightarrow P \vee Q \vee R$ 替换规则

公式的等价性

- 将语句“情况并非如此，如果他不来，那么我也不去”化简。
  - ***P***：他来。
  - ***Q***：我去。
  - 符号化为：$\neg(\neg P \rightarrow \neg Q)$
  - 化简：

$$
\begin{aligned}
& \neg(\neg P \rightarrow \neg Q) \\
\Leftrightarrow\ & \neg(\neg\neg P \vee \neg Q) && E27 \\
\Leftrightarrow\ & \neg(P \vee \neg Q) && E10 \\
\Leftrightarrow\ & \neg P \wedge Q && E10, E12
\end{aligned}
$$

  - 化简后最终意思：我去了，他没来。

- 如果电话号码数据库是打开的，那么监督程序被置于关闭状态，只要系统不在初态。

P：电话号码数据库是打开的

Q: 监督程序被置于关闭状态

R: 系统不在初态

R→(P→Q)

1.4重言式和永真蕴含式

- 一个命题公式若含有**N**个变元，则应有2^n种组合，所以证明两个命题公式的等价，当命题变元多时使用真值表法是不现实的，只能采用上面的等价变换的方法。
- 有两种特殊的命题公式值得一提，即不依赖变元的真值指派总是取值为**T**的公式（称为永真式），不依赖变元的真值指派总是取值为**F**的公式（称为永假式），其余则情况则为可满足的式子。

1.4重言式和永真蕴含式

- 重言式
  - 给定一个命题公式，若无论对其中的命题变元作何种真值指派，其对应的真值永为***T***，则称该命题公式为重言式或永真式。
- 永假式
  - 给定一个命题公式，若无论对其中的命题变元作何种真值指派，其对应的真值永为***F***，则称该命题公式为永假式或矛盾。
- 至少存在一组真值指派使命题公式取值为**T**的命题公式，称为可满足的。

- 对命题公式$P \vee \neg P$,$P \wedge \neg P$,$P \rightarrow Q$做出真值表

P	$P \vee \neg P$	$P \wedge \neg P$
0	1	0
1	1	0

P	Q	$P \rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	**1**	**1**

重言式和永假式

- $P \vee \neg P \Leftrightarrow T$，$P \wedge \neg P \Leftrightarrow F$
- 永真式与永假式取决于公式本身的结构，不依赖变元的真值指派。
- 例如$(P \wedge Q \vee R) \vee \neg(P \wedge Q \vee R)$就是一个永真式
- $(P \wedge Q \vee R) \wedge \neg(P \wedge Q \vee R)$就是一个永假式
- 永真式的性质：若公式A是永真式，并且P_1，P_2，…，P_n是出现于A中的变元，若用公式B代换A中的原子变元$P_i(i=1,2,\ldots,n)$,所得到的公式设为A'，则A'也是永真式。（注意代换过程从左向右要进行到底）。对非永真式，这条性质不一定成立。

带入规则

- 带入规则
  - 在一个重言式中，某个命题变元出现的每一处均代以同一个公式后，所得到的新的公式仍是重言式，这条规则称之为带入规则。

带入规则

- 应用代入规则和替换规则及已有的重言式可以证明新的重言式

$P \wedge \neg P \leftrightarrow F$是重言式，那么用 $R \wedge Q$ 代P得到的式子仍然是重言式。

$$(R \wedge Q) \wedge \neg(R \wedge Q) \leftrightarrow F$$

E_{11}: $\neg(P \wedge Q) \Leftrightarrow \neg P \vee \neg Q$　　用 $A \wedge B$ 代P, $\neg A \wedge \neg B$ 代Q

$$\neg((A \wedge B) \wedge (\neg A \wedge \neg B) \Leftrightarrow \neg(A \wedge B) \vee \neg(\neg A \wedge \neg B)$$

(1)重言式的否定是一个矛盾式，一个矛盾式的否定是重言式，所以只研究其中之一就可以了。

(2)重言式的析取，合取，单条件，双条件都是重言式。于是可由简单的重言式推出复杂的重言式。

(3)由重言式可以产生许多有用的恒等式。

永真蕴含式

- 定义：当且仅当$A \rightarrow B$是一个永真式时，称A永真蕴含B，记作 $A \Rightarrow B$

- 要证明A永真蕴含B，只需要证明$A \rightarrow B$是一个永真式
  - 假定前件A是真，若能推出后件B必为真，则$A \rightarrow B$永真，于是 $A \Rightarrow B$
  - 假定后件B是假，若能推出前件A必为假，则$A \rightarrow B$永真，于是 $A \Rightarrow B$

永真蕴含式

试证明$(P \to Q) \wedge (Q \to R) \Rightarrow P \to R$

证明1: 假定$(P \to Q) \wedge (Q \to R)$的真值为$T$，那么$(P \to Q)$为$T$并且$(Q \to R)$为$T$,分两种情况讨论：

(1)若P为T，则Q必然为T，因而R为T，于是有$(P \to R)$为T;

(2)若P为F，则此时无论R为T或F，都有$(P \to R)$为T。

综上所述，假定前提$(P \to Q) \wedge (Q \to R)$的真值为$T$，推出结论$P \to R$的真值为$T$，蕴含式成立。

证明2: 假定$P \to R$的真值为F，那么由定义可知P为T，并且R为F,分两种情况讨论：

(1)若Q为T，则$(Q \to R)$为F，于是有$(P \to Q) \wedge (Q \to R)$为$F$;

(2)若Q为F，则$(P \to Q)$为F，于是有$(P \to Q) \wedge (Q \to R)$为$F$。

综上所述，假定结论$P \to R$的真值为F，推出前提$(P \to Q) \wedge (Q \to R)$的真值为$F$，蕴含式成立。

常用永真蕴含式

I_1 $P \wedge Q \Rightarrow P$

I_2 $P \wedge Q \Rightarrow Q$ } 化简式

I_3 $P \Rightarrow P \vee Q$

I_4 $Q \Rightarrow P \vee Q$ } 附加式

I_5 $\neg P \Rightarrow P \rightarrow Q$

I_6 $Q \Rightarrow P \rightarrow Q$

I_7 $\neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow P$

I_8 $\neg(P \rightarrow Q) \Rightarrow \neg Q$

I_9 $\neg P, P \vee Q \Rightarrow Q$ 析取三段论

I_{10} $P, P \rightarrow Q \Rightarrow Q$ 假言推论

I_{11} $\neg Q, P \rightarrow Q \Rightarrow \neg P$ 拒取式

I_{12} $P \rightarrow Q, Q \rightarrow R \Rightarrow P \rightarrow R$ 假言三段论

I_{13} $P \vee Q, P \rightarrow R, Q \rightarrow R \Rightarrow R$ 二难推论

I_{14} $P \rightarrow Q \Rightarrow R \vee P \rightarrow R \vee Q$

I_{15} $P \rightarrow Q \Rightarrow R \wedge P \rightarrow R \wedge Q$

I_{16} $P, Q \Rightarrow P \wedge Q$

等价式和蕴含式的关系

- 设**P**和**Q**是命题公式，$P \Leftrightarrow Q$的充分必要条件是 $P \Rightarrow Q$ 并且 $Q \Rightarrow P$

- 设**A**、**B**、**C**是公式且有 $A \Rightarrow B$，$B \Rightarrow C$，则 $A \Rightarrow C$

- 设**A, B,C**是公式，若有 $A \Rightarrow B$，$A \Rightarrow C$ 则 $A \Rightarrow B \wedge C$

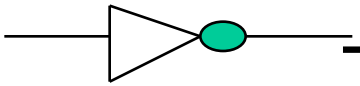
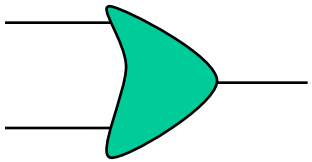
蕴含式

- 定义：假设$H_1,\ldots,H_m,Q$是命题公式。如果（$H_1\wedge\ldots\wedge H_m$）$\Rightarrow Q$，则称$H_1,\ldots,H_m$共同蕴涵$Q$，并记作$H_1,\ldots,H_m\Rightarrow Q$
- 定理：如果$H_1\wedge\ldots\wedge H_m\wedge P\Rightarrow Q$，则$H_1,\ldots,H_m\Rightarrow P\rightarrow Q$
- 定理是显然的：$H_1\wedge\ldots\wedge H_m\wedge P$为真，保证了$P$为真，$H_1\wedge\ldots\wedge H_m\wedge P\Rightarrow Q$，保证了$Q$为真，于是有$P\rightarrow Q$为真，得证。

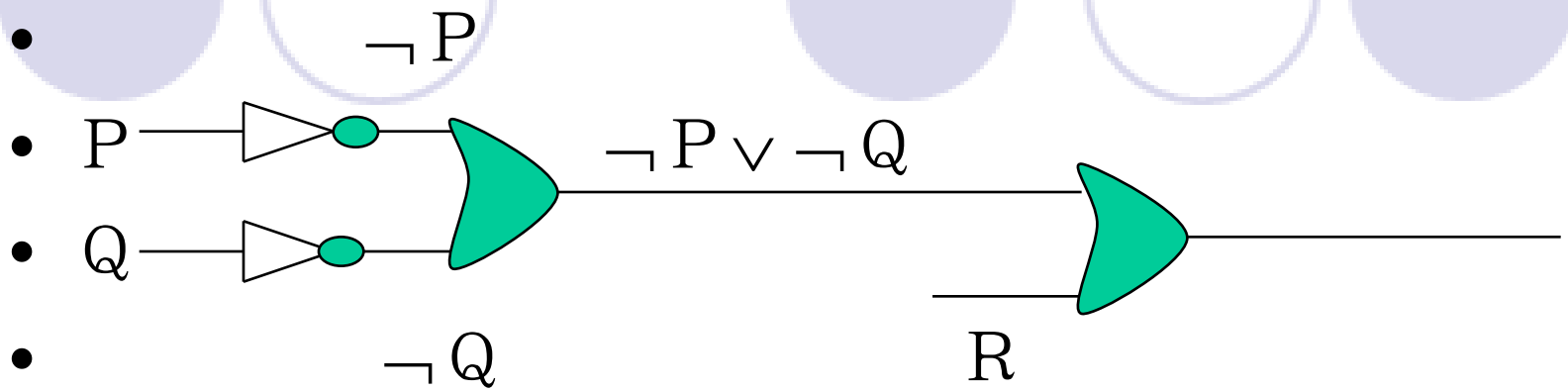
全功能联结词集合

- 前面我们已经学习了6个逻辑联结词：$\neg \wedge \vee \rightarrow \leftrightarrow$ ∇
- 是不是这些逻辑联结词都是必不可少的呢？在前面介绍的等价公式中我们已经发现，有些逻辑联结词是可以被其它逻辑联结词代替的：
- 例如：$P \rightarrow Q \Leftrightarrow \neg P \vee Q$
- $P \leftrightarrow Q \Leftrightarrow （P \wedge Q）\vee （\neg P \wedge \neg Q）$
- $P \vee Q \Leftrightarrow \neg(\neg P \wedge \neg Q)$
- $P \wedge Q \Leftrightarrow \neg(\neg P \vee \neg Q)$

- 从上面的讨论我们可以看出逻辑联结词集合{¬，∧，∨}是全功能的，但不是最小的。逻辑联结词全功能最小完备集是指用该集合中的逻辑联结词能表示所有的命题公式，并且删除一个至少有一个公式不能被表示。例如：{¬，∧}和{¬，∨}均是最小功能完备集

- 逻辑部件非门的图示：
- P  ¬P
- 逻辑部件与门的图示：
- P  P∧Q
- Q
- 逻辑部件或门的图示：
- P  P∨Q
- Q

- 应用：汽车报站系统
- 令P：汽车运行的方向（上行为0下行则为1）
- Q：当前站点（用数字表示）
- R：下一站点（用数字表示）
- 于是其逻辑表达式为：
- $P \wedge Q \rightarrow R = \neg (P \wedge Q) \vee R$
- $= \neg P \vee \neg Q \vee R$
- 请同学完成该逻辑表达式的图示.


¬ P
P
Q
¬ Q
¬ P ∨ ¬ Q
R

作业

- **P27**
  - **10、11(1)(4)(5)、12、14(1)(3)、15(2)(4)(6)**

补充：证明下列公式等价

$$((Q \wedge A) \rightarrow C) \wedge (A \rightarrow (P \vee C)) \Leftrightarrow (A \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow C$$