离散数学

大连理工大学软件学院

陈志奎　博士、教授、博士生导师

办公室： 综合楼405，Tel： 62274392
实验室：综合楼一楼，教学楼A502/C109,

Mobile: 13478461921
Email: zkchen@dlut.edu.cn
zkchen00@hotmail.com
QQ： 1062258606

离散数学

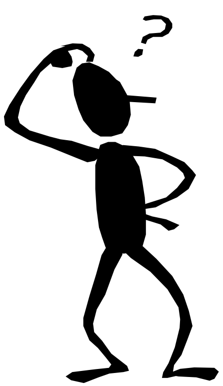
第二章 谓词逻辑

第一章回顾

- 命题
- 命题公式
- 命题翻译—符号化
- 命题推理
  - ✓ 真值表
  - ✓ 范式与主范式
  - ✓ 逻辑推演

谓词逻辑的引入

- 在命题逻辑中，试进行下列推理:
  - “苏格拉底三段论”：
  - 凡人都是要死的， P
  - 苏格拉底是人， Q
  - 所以苏格拉底是要死的。R



$$(P \land Q) \rightarrow R$$

命题逻辑中，命题被当作一个基本的，不可分割的单位，只研究由原子命题和联接词所组成的复合命题，没有研究命题内部的内部结构以及命题之间的内在关系。

- 类似的还有很多，例如：
  - 所有的人都要呼吸，李华是人，所以李华要呼吸。
  - 所有的正整数都大于**0**，**3**是正整数，所以**3**大于**0**。

- 本章介绍的谓词逻辑，对原子命题的成份、结构和原子命题间的共同特性等作了进一步分析。引入了个体词、谓词、量词、谓词公式等概念，在此基础上研究谓词公式间的等值关系和蕴含关系，并且对命题逻辑中的推理规则进行扩充和进行谓词演绎。

本章内容

- 谓词、个体、量词
- 合式谓词公式
- 自由变元和约束变元
- 含有量词的等价式和永真蕴含式
- 谓词逻辑中的推理理论
- 前束范式、斯柯林范式

2.1谓词演算

本质上是把数学中的逻辑论证加以符号化。

- 原子命题被分解为**谓词**和**个体**两部分。
- 个体：可以独立存在的事物 。
  - 老师，计算机，证书，道德，智商等。
- 谓词：用来刻划个体的性质或个体之间关系的词称为谓词，刻划一个个体性质的词称为一元谓词；刻划**n**个个体之间关系的词称为**n**元谓词
  。

谓词和个体

- 例：
  - （1）李明是学生；
  - （2）张亮比陈华高；
  - （3）陈华坐在张亮与李明之间。

  - 个体：李明，张亮，陈华
  - 谓词：…是学生； …比…高； …坐在…和…之间
  - 一元谓词： …是学生
  - 二元谓词： …比…高
  - 三元谓词： …坐在… 和…之间

谓词和个体

（1）李明是学生；

（2）张亮比陈华高；

（3）陈华坐在张亮与李明之间。

- 一般用大写的英文字母表示谓词，而用小写的英文字母表示个体。
- 上述命题可分别表示为 Q(a), P(b, c), R(c, b, a)
- 一般地，由n个个体和n元谓词所组成的命题可表示为F（$a_1, a_2, \cdots, a_n$），其中F表示n元谓词，$a_1, a_2, \cdots, a_n$ 分别表示n个个体。
- 注意：$a_1, a_2, \cdots, a_n$的排列次序是重要的。

谓词和个体

- 对于F（a_1, a_2， …，a_n），如果括号内的个体是抽象的可变化的，那么F（a_1, a_2， …，a_n）称为n元原子谓词公式或n元命题函数。

- 注意：命题的n元谓词表示形式和n元命题函数不同?
  - a:张明。
  - 命题函数：P(x)　　　x是学生。
  - 谓词表示形式:P(a)　　张明是学生。

个体域

任何个体的变化都有一个范围，这个变化范围称为个体域(或论域)。

- 个体域可以是有限的，也可以是无限的。所有个体域的总和叫作全总个体域。以某个个体域为变化范围的变元叫个体变元。
- 个体域的变换范围影响到谓词公式的真假
- $R(x)$：x是大连理工大学软件学院的学生.
  - 如果x的讨论范围是大工软件学院某个班级的学生 永真
  - 如果x的讨论范围是某个幼儿园里的小朋友 永假
  - 如果x的讨论范围是大连的所有市民 可满足

谓词的阶

- 在谓词 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 中，如果个体变元是一些简单的事物，那么***P***为一阶谓词；
- 若个体变元中有一些是一阶谓词，那么***P***为二阶谓词；二阶以上递推。

本门课程仅研究
一阶谓词

量词

- 使用前面介绍的谓词和个体变元，还不足以描述自然界的所有命题。
- 例：
  - 描述命题“所有的正整数都大于0”以及命题“有些正整数是素数”。
- 量词的引入：量词指在命题里表示数量的词。

全称量词 $\forall$

- 符号“$(\forall x)P(x)$”表示命题：“对于个体域中所有个体**x**，谓词$P(x)$均为T”。其中“$(\forall x)$”叫作全称量词，读作“对于所有的x”。谓词$P(x)$称为全称量词的辖域或作用范围。
- 例如：
  - 所有的人都是要死的
  - 令$D(x)$：x 是要死的。
  - 则命题可表示为 $\forall x\, D(x)$
  - 取个体域为全体人的集合，是真命题。
  - 所有的正整数都是素数；
  - 令 $P(x)$：x 是素数
  - 则命题可表示成$\forall x\, P(x)$
  - 取个体域为正整数集，是假命题。

存在量词 ∃

- 符号“ $(\exists x)P(x)$ ”表示命题：“在个体域中存在某些个体使谓词$P(x)$为T”其中“ $(\exists x)$ ”叫作**存在量词**，读作“存在x”。谓词$P(x)$称为存在量词的**辖域**或作用范围。
- 例如：
  - 有些正整数是素数；
  - 令 $P(x)$：x 是素数
  - 则命题可表示成 $\exists x\, P(x)$
  - 取个体域为正整数集，是真命题。

量词

- 量词本身不是一个独立的逻辑概念，可以用 $\wedge,\vee$ 联结词取代。
  - 设个体域 $S: S=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ ，谓词可以表示成以下形式：

$$(\forall x)A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge \cdots \wedge A(a_n)$$

$$(\exists x)A(x) \Leftrightarrow A(a_1) \vee A(a_2) \vee \cdots \vee A(a_n)$$

- 由量词确定的命题真值与个体域有关。
  - 令 $\boldsymbol{P(x)}$：$\boldsymbol{x}$ 是素数
  - 则 $\forall \boldsymbol{x}\, \boldsymbol{P(x)}$，如果取个体域为素数集，为真；如果个体域为整数集，为假。

量词

以后不加强调个体域
均指全总个体域

- 为了方便起见，个体域 体域，每个个体变元的真正变化范围则用一个特性谓词来刻划。
- 注意：对于全称量词应使用单条件逻辑联结词；对于存在量词应使用逻辑联结词合取。
  - $R(x)$: x是自然数；$P(x)$: x大于0.

$$(\forall x)(R(x) \to P(x))$$

$$(\exists x)(R(x) \wedge P(x))$$

量词

- 全称量词和存在量词不仅可以单独出现，还可以**组合形式出现**。
- 对于二元谓词***P(x,y)***，可能有以下几种量化的可能：

$$(\forall x)(\forall y)P(x,y),(\forall x)(\exists y)P(x,y)$$

$$(\exists x)(\forall y)P(x,y),(\exists x)(\exists y)P(x,y)$$

$$(\forall y)(\forall x)P(x,y),(\exists y)(\forall x)P(x,y)$$

$$(\forall y)(\exists x)P(x,y),(\exists y)(\exists x)P(x,y)$$

组合量词的含义

翻译时从左向右

- 设$A(x,y)$表示x,y同姓， x的个体域是1班同学，y的个体域是2班同学。
  - $(\forall x)(\forall y)A(x,y)$：1班任何一个同学与2班的所有同学同姓；
  - $(\forall y)(\forall x)A(x,y)$：2班任何一个同学与1班的所有同学同姓；
  - $(\forall x)(\exists y)A(x,y)$：对1班的任意一个同学，2班都有人跟他同姓；
  - $(\exists y)(\forall x)A(x,y)$：存在一个2班同学和1班的所有同学同姓。

$$(\forall x)(\exists y)A(x,y) \neq (\exists y)(\forall x)A(x,y)$$

合式谓词公式

- 若P为不能再分解的n元谓词变元，$x_1, x_2, \ldots x_n$是个体变元，则称$P(x_1, x_2, \ldots x_n)$为原子公式或原子谓词公式。当$n=0$时，P表示命题变元即原子命题公式。所以，命题逻辑实际上是谓词逻辑的特例。
- 由原子谓词公式出发，通过命题联结词，可以组成复合谓词公式，叫分子谓词公式。

合式谓词公式

- 定义：
  - （1）原子谓词公式是合式的公式；
  - （2）若A是合式的公式，则$\neg A$也是合式的公式；
  - （3）若A和B都是合式的公式，则$A\wedge B$，$A\vee B$，$A\rightarrow B$，$A\leftrightarrow B$ 也都是合式的公式；
  - （4） 如果A是合式的公式，x是任意变元，且A中无$(\forall x)$或$(\exists x)$出现，则$(\exists x)A(x)$和$(\forall x)A(x)$都是合式的公式；
  - （5）当且仅当有限次使用规则（1）～（4）由逻辑联结词、圆括号构成的有意义的字符串是合式的公式。

自由变元和约束变元

- 在谓词公式中，如果有形如 $(\forall x)A(x)$ 或者 $(\exists x)A(x)$，则称它们是**x**的约束部分。
- 每个量词后面的最短公式，称为量词的辖域。
- 约束变元：一个变元若出现在包含这个变元的量词(全称量词或存在量词)的辖域之内，则该变元称为约束变元，其出现称为约束出现。
- 自由变元：变元的非约束出现叫作自由出现，该变元叫作自由变元。

自由变元和约束变元

- 例：说明以下各式量词的辖域与变元的约束情况。

(1) $(\forall x)P(x,y)$

(2) $(\forall x)(P(x)\rightarrow(\exists y)Q(x,y))$

(3) $(\forall x)(\forall y)(P(x,y)\wedge Q(y,z))\wedge(\exists x)(P(x,y))$

(4) $((\forall x)(P(x)\wedge(\exists x)Q(x,z))\rightarrow(\exists y)R(x,y))\vee Q(x,y)$

自由变元和约束变元

- 从约束变元的概念可知，谓词**P(x)**的量化，就是从变元**x**的整个个体域着眼，对性质**P(x)**所作的一个全称判断或特称判断。其结果是将谓词变成一个命题。因此，$(\forall x)$和$(\exists x)$，可以看成<u>消元运算</u>。
- 对**n**元谓词$P(x_1, x_2, \ldots x_n)$量化后，假设有**k**个自由变元，则降为**k**元谓词。

$$(\forall x)P(x, y, z)$$ 二元谓词

$$(\exists y)(\forall x)(P(x, y, z))$$ 一元谓词

自由变元和约束变元

- 一般情况下给定一个谓词公式***A*(*x*)**，仅表明在该公式中只有一个自由变元，但并不限制在该公式中还存在若干约束变元。
- 以下各式都可以写成***A*(*x*)**：

$$(1)\ (\forall y)(P(y)\wedge Q(x,y))$$

$$(2)\ (\forall x)R(x)\vee S(x)$$

$$(3)\ (\exists y)S(y)\rightarrow S(x)$$

$$(4)\ (\forall y)P(x,y)\vee Q(x)$$

谓词公式的解释

- 在命题逻辑中对一个公式的解释，是对每个命题变元进行取值指派，如果公式有**n**个变元，则有2^n种解释。
- 谓词公式的解释，涉及到命题变元、谓词变元、个体变元、符号函数……

真值表法不可行

谓词公式的解释

- 定义：设A的个体域是D，如果用一组谓词常量、命题常量和A中的个体及函数符号（将它们简记为I）代换公式A中相应的变元，则该公式A转化成一个命题，可以确定其真值（记作P）。称I为公式A在D中的**解释**（或指派），称P为公式A关于解释I的**真值**。
- 永真
- 永假
- 可满足

谓词公式的解释

- 给定两个谓词公式***A***和***B***，***D***是它们共同的个体域，若***A***→***B***在***D***中是永真式，则称遍及***D***有 $A \Rightarrow B$ ；若***D***是全总个体域，则称 $A \Rightarrow B$ 若 $A \Rightarrow B$ 且 $B \Rightarrow A$，则称 $A \Leftrightarrow B$。
- 命题逻辑中的恒等式和永真蕴含式全部可以推广到谓词逻辑中

$$I'_1 : P(x) \wedge Q(x, y) \Rightarrow P(x)$$

$$E'_{10} : \neg\neg P(x_1, x_2, \ldots, x_n) \Leftrightarrow P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

含有量词的等价式和永真蕴含式

- 量词转换律
  - 例：设$P(x)$：x今天来上课。$x \in$ 软件工程系**15**级**4-7**班全体同学。
  - $(\forall x)(P(x))$：所有同学今天都来上课了。
  - $\neg(\forall x)(P(x))$：不是所有人今天都来上课了。
  - $(\exists x)\neg P(x)$：今天有人没有来上课。

$$\neg(\forall x)(P(x)) \Leftrightarrow (\exists x)\neg P(x)$$

  - $(\exists x)(P(x))$：有人今天来上课了。
  - $\neg(\exists x)(P(x))$：没有人今天来上课。
  - $(\forall x)\neg P(x)$：所有的人今天都没有来上课。

$$\neg(\exists x)(P(x)) \Leftrightarrow (\forall x)\neg P(x)$$

量词转换律

$$\neg(\forall x)(A(x)) \Leftrightarrow (\exists x)\neg A(x)$$

$$\neg(\exists x)(A(x)) \Leftrightarrow (\forall x)\neg A(x)$$

（其中**A(x)**是任意的公式）

证明 设个体域 $E = \{ a_{1,} a_{2,} \cdots, a_n \}$,则

$$\neg\forall x A(x) \Leftrightarrow \neg(A(a_1) \wedge A(a_2) \wedge .... \wedge A(a_n))$$

$$\Leftrightarrow \neg A(a_1) \vee \neg A(a_2) \vee .... \vee \neg A(a_n)$$

$$\Leftrightarrow \exists x \neg A(x)$$

$$\neg\exists x A(x) \Leftrightarrow \neg(A(a_1) \vee A(a_2) \vee .... \vee A(a_n))$$

$$\Leftrightarrow \neg A(a_1) \wedge \neg A(a_2) \wedge .... \wedge \neg A(a_n)$$

$$\Leftrightarrow \forall x \neg A(x)$$

作业

- P47
- 1,2